

Numeriek: Wiskunde die Werkt

Numeriek differentiëren en integreren

Karel in 't Hout

Nazomercursus PWN i.s.m. PWV
September 2026

Inhoud

1 Numerieke benadering van de eerste afgeleide

2 Numeriek differentiëren: algemene foutanalyse

3 Eenvoudige numerieke integratiemethoden

4 Numerieke integratie: uitgebreide methoden

Numerieke benadering van de eerste afgeleide

In veel toepassingen van de wiskunde wil men de afgeleide van een functie f weten. Voorbeelden van toepassingsgebieden zijn:

- natuurkunde (bijv. snelheid van een voorwerp)
- scheikunde (bijv. reactiesnelheid)
- biologie (bijv. populatiegroeisnelheid)
- techniek (bijv. stroomsterkte)
- economie (bijv. marginale kosten)

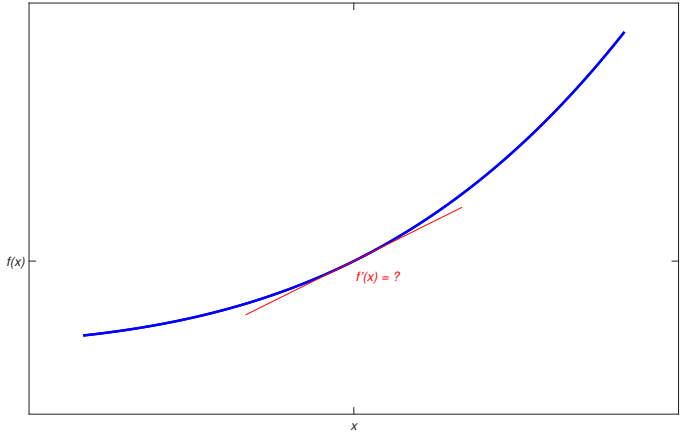
Als een functievoorschrift voor f bekend is, dus $f(x)$ is voor iedere x gegeven door een expliciete formule, dan kan men rekenregels voor differentiëren uit de analyse gebruiken.

In de praktijk treedt echter vaak de situatie op dat er *niet* zo'n voorschrift is, bijv. als f een (natuurkundige, scheikundige, ...) grootheid representeert die alleen via metingen is bepaald.

Met geschikte numerieke methoden kan in deze situatie de (onbekende) afgeleide van f in een willekeurig gegeven punt $x \in \mathbb{R}$ nauwkeurig worden *benaderd*.

We beschouwen in deze cursus eindige-differentieformules.

Notatie: de (exacte) afgeleide van f in een punt x wordt genoteerd met $f'(x)$ of $\frac{df(x)}{dx}$.



Per definitie

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

als deze limiet bestaat. Dit impliceert dat voor voldoende kleine waardes $h > 0$ geldt

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1}$$

Dit is de (eerste-orde) voorwaartse eindige-differentieformule. We noteren het rechterlid in (1) met $Q_{\mathrm{v}}(x, h)$.

Het is eveneens zo dat

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Dit leidt tot

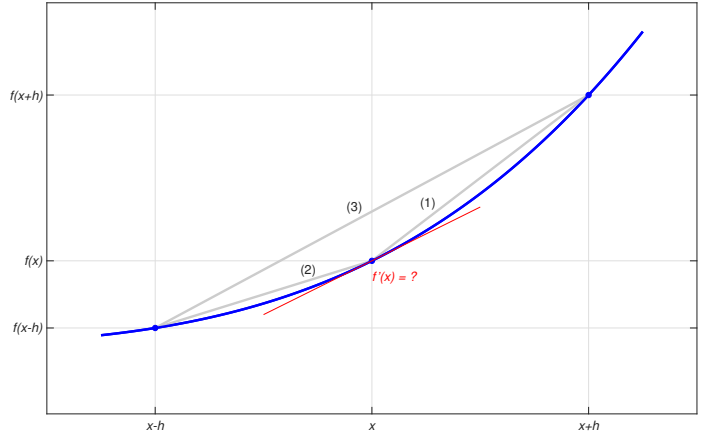
$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{2}$$

en is de (eerste-orde) achterwaartse eindige-differentieformule. We noteren het rechterlid in (2) met $Q_{\mathrm{a}}(x, h)$.

Vervolgens kan het rekenkundig gemiddelde van de twee benaderingen (1), (2) als nieuwe benadering van $f'(x)$ worden beschouwd,

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \tag{3}$$

Dit heet de (tweede-orde) centrale eindige-differentieformule. We noteren het rechterlid in (3) met $Q_c(x, h)$. Merk op dat de waarde $f(x)$ niet in (3) voorkomt.



Voorbeeld Om een eerste indruk van de nauwkeurigheid van de drie eindige-differentieformules te bekomen, beschouw $f(x) = e^x$ en benader $f'(1) = e$.

- Voorwaarts

h	benadering	fout
0.025	2.7525	-0.0343
0.050	2.7874	-0.0691
0.100	2.8588	-0.1406

- Achterwaarts

h	benadering	fout
0.025	2.6846	0.0337
0.050	2.6514	0.0668
0.100	2.5868	0.1315

- Centraal

h	benadering	fout
0.025	2.7186	-0.0003
0.050	2.7194	-0.0011
0.100	2.7228	-0.0045

De benaderingsfouten (of resttermen) van de drie formules zijn gedefinieerd als

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{v}}(x,h) &= f'(x) - Q_{\mathrm{v}}(x,h), \\ R_{\mathrm{a}}(x,h) &= f'(x) - Q_{\mathrm{a}}(x,h), \\ R_{\mathrm{c}}(x,h) &= f'(x) - Q_{\mathrm{c}}(x,h). \end{aligned}$$

In het voorbeeld volgt, gebruikmakend van

$$e^h = 1 + h + \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{6}h^3 + \tfrac{1}{24}h^4 + \mathcal{O}(h^5), \tag{4}$$

dat

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{v}}(1,h) &= -\tfrac{1}{2}eh + \mathcal{O}(h^2), \\ R_{\mathrm{a}}(1,h) &= +\tfrac{1}{2}eh + \mathcal{O}(h^2), \\ R_{\mathrm{c}}(1,h) &= -\tfrac{1}{6}eh^2 + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

Voor de eerste-orde voorwaartse en achterwaartse eindige-differentieformules is de grootte van de benaderingsfout dus $\mathcal{O}(h)$, terwijl het voor de tweede-orde centrale eindige-differentieformule $\mathcal{O}(h^2)$ bedraagt. Het laatste is veel gunstiger!

Lancering SpaceX Crew-11 op 1 augustus 2025 vanaf Kennedy Space Center, Florida



Foto: K.J. in 't Hout

Zij t de tijd (in s) vanaf de lancering en $u(t)$ de hoogte (in m) boven de aarde.

Gegeven is onderstaande tabel met synthetische waardes.

Opgave 1 Benader met de tweede-orde centrale formule de verticale snelheid $v(t) = u'(t)$ (in m/s) op alle tijdstippen behalve $t = 30$.

t	$u(t)$	$v(t) \approx$
0	0	0
3	15	?
6	72	?
9	159	?
12	288	?
15	453	?
18	660	?
21	909	?
24	1200	?
27	1533	?
30	1914	

Zij t de tijd (in s) vanaf de lancering en $u(t)$ de hoogte (in m) boven de aarde.

Gegeven is onderstaande tabel met synthetische waardes.

Opgave 1 Benader met de tweede-orde centrale formule de verticale snelheid $v(t) = u'(t)$ (in m/s) op alle tijdstippen behalve $t = 30$.

t	$u(t)$	$v(t) \approx$
0	0	0
3	15	12
6	72	24
9	159	36
12	288	49
15	453	62
18	660	76
21	909	90
24	1200	104
27	1533	119
30	1914	

Numeriek differentiëren: algemene foutanalyse

Een analyse van de benaderingsfouten bij eindige-differentieformules voor de afgeleide van een willekeurig gegeven (gladde) functie f volgt met de stelling van Taylor: voor ieder gegeven natuurlijk getal n is er een (onbekend) punt ξ tussen x en $x+h$ zodat

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f^{(2)}(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi). \qquad (5)$$

De som van de eerste $n+1$ termen in het rechterlid heet het Taylor-polynoom van graad n. Het vormt een benadering van $f(x+h)$ voor voldoende kleine $|h|$.

De laatste term in het rechterlid heet de restterm (of afbreekfout) volgens Lagrange.

Opmerking: als $n = 0$, dan bekomt men de middelwaardestelling.

Met de stelling van Taylor volgt dat voor de benaderingsfouten van de drie eindige-differentieformules geldt:

$$
\begin{aligned}
R_{\mathrm{v}}(x,h) &= -\tfrac{1}{2}f^{(2)}(x)h + \mathcal{O}(h^2),\\
R_{\mathrm{a}}(x,h) &= +\tfrac{1}{2}f^{(2)}(x)h + \mathcal{O}(h^2),\\
R_{\mathrm{c}}(x,h) &= -\tfrac{1}{6}f^{(3)}(x)h^2 + \mathcal{O}(h^4).
\end{aligned}
$$

Omdat de laagste macht van h in het rechterlid gelijk is aan 1 bij de voorwaartse en achterwaartse formules, zegt men dat deze orde 1 hebben. Analoog zegt men dat de centrale formule orde 2 heeft.

Met de stelling van Taylor kan worden bewezen (zie syllabus) dat er geen eindige-differentieformule met orde groter dan 2 bestaat wanneer alleen functiewaardes in de drie punten $x-h, x, x+h$ worden gebruikt.

Met behulp van Taylor kan men de drie eindige-differentieformules uitbreiden met:

(a) formules op basis van andere/meer punten dan $x-h, x, x+h$
(b) formules met orde groter dan 2
(c) formules voor punten die niet op gelijke afstand van elkaar liggen
(d) formules voor hogere-orde afgeleiden

Een voorbeeld van (a) is de tweede-orde achterwaartse formule,

$$f'(x) \approx \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h}. \tag{6}$$

Opgave 2 Benader met formule (6) de verticale snelheid $v(t) = u'(t)$ als $t = 30$.

Opgave 3* Toon aan dat formule (6) orde 2 heeft.

Een voorbeeld van (d) is de tweede-orde centrale formule voor de tweede afgeleide,

$$f^{(2)}(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}. \tag{7}$$

Opgave 4 Zij $f(x) = \frac{1}{x}$. Benader $f^{(2)}(1)$ met formule (7) voor $h = 0.04, 0.02, 0.01$ en bepaal vervolgens de benaderingsfouten.

Opgave 5* Toon aan dat formule (7) orde 2 heeft.

Tenslotte:

Eindige-differentieformules worden vaak uitgevoerd op een computer zodat afrondfouten optreden.

Ook treden er bij metingen van grootheden in de praktijk meetfouten op.

Er dient aldus rekening te worden gehouden met de doorwerking van deze fouten op de eindige-differentiebenaderingen.

Een analyse (zie syllabus) laat zien dat deze ongunstiger wordt naarmate h kleiner wordt.

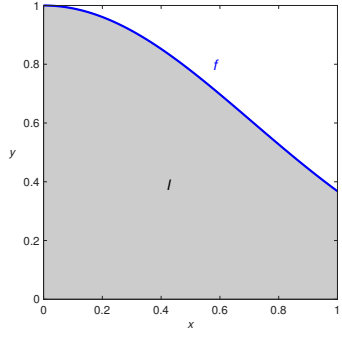
Daarom is er in de praktijk een ondergrens op h voor nauwkeurigheid.

Eenvoudige numerieke integratiemethoden

Net als de afgeleide, wil men in veel toepassingsgebieden de integraal van een functie f over een interval $[a, b]$ weten,

$$I = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{8}$$

Voorbeeld $f(x) = e^{-x^2}$ en $[a, b] = [0, 1]$



Vaak is het niet mogelijk, of heel moeilijk, om met rekenregels voor integreren uit de analyse de waarde I te bepalen. Dit geldt voor de functie in het voorbeeld, die in de kanstheorie een grote rol speelt.

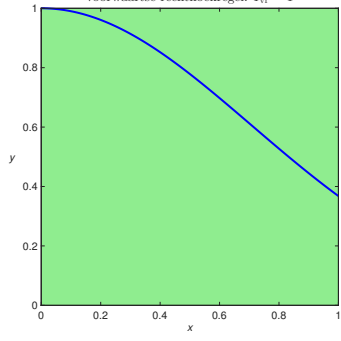
Ook is de waarde I niet exact te bepalen indien er geen functievoorschrift voor f is, maar $f(x)$ alleen (bijv. via metingen) voor een eindig aantal punten x is gegeven.

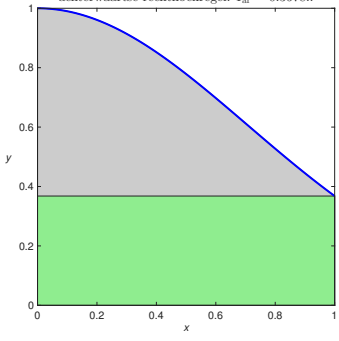
Met geschikte numerieke methoden kan in deze situaties de onbekende integraal van f over $[a, b]$ vaak nauwkeurig worden benaderd.

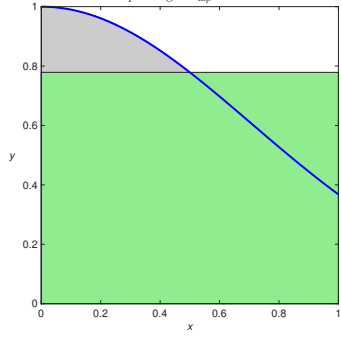
Zij $h = b - a$. Vier basale numerieke integratiemethoden:

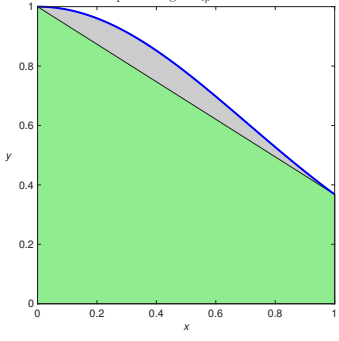
- $I_{\mathrm{vr}} = hf(a)$: de voorwaartse rechthoekregel
- $I_{\mathrm{ar}} = hf(b)$: de achterwaartse rechthoekregel
- $I_{\mathrm{mp}} = hf((a + b)/2)$: de midpuntregel
- $I_{\mathrm{tp}} = h(f(a) + f(b))/2$: de trapeziumregel

Merk op dat $I_{\mathrm{tp}} = (I_{\mathrm{vr}} + I_{\mathrm{ar}})/2$. In het voorbeeld hebben we:


voorwaartse rechthoekregel: $I_{vr} = 1$
y
x
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


achterwaartse rechthoekregel: $I_{ar} = 0.3678..$
y
x
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


midpuntregel: $I_{mp} = 0.7788..$
y
x
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


trapeziumregel: $I_{tp} = 0.6839..$
y
x
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

We analyseren de benaderingsfout voor de voorwaartse rechthoekregel bij willekeurig gegeven (gladde) functie f.

Zij $m_j = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f^{(j)}(x)$ en $M_j = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f^{(j)}(x)$ voor $j = 1, 2$.

Volgens de stelling van Taylor is er voor elke $x \in [a, b]$ een punt $\xi(x) \in (a, b)$ zodat

$$f(x) = f(a) + (x - a) f'(\xi(x)).$$

Integreren over $[a, b]$ geeft

$$I = I_{\mathrm{vr}} + \int_a^b (x - a) f'(\xi(x))\, dx.$$

Er volgt

$$m_1 \int_a^b (x - a)\, dx \leqslant I - I_{\mathrm{vr}} \leqslant M_1 \int_a^b (x - a)\, dx$$

en aldus

$$\frac{1}{2} m_1 h^2 \leqslant I - I_{\mathrm{vr}} \leqslant \frac{1}{2} M_1 h^2.$$

Voor de benaderingsfouten van de vier basale numerieke integratiemethoden geldt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_1h^2 &\leqslant I - I_{\mathrm{vr}} \leqslant \frac{1}{2}M_1h^2,\\
-\frac{1}{2}M_1h^2 &\leqslant I - I_{\mathrm{ar}} \leqslant -\frac{1}{2}m_1h^2,\\
\frac{1}{24}m_2h^3 &\leqslant I - I_{\mathrm{mp}} \leqslant \frac{1}{24}M_2h^3,\\
-\frac{1}{12}M_2h^3 &\leqslant I - I_{\mathrm{tp}} \leqslant -\frac{1}{12}m_2h^3.
\end{aligned}$$

Opgave 6 Leid de inschatting af voor $I - I_{\mathrm{ar}}$.

Opgave 7* Leid de inschatting af voor $I - I_{\mathrm{mp}}$.

Opgave 8 Pas de inschattingen toe in het voorbeeld.

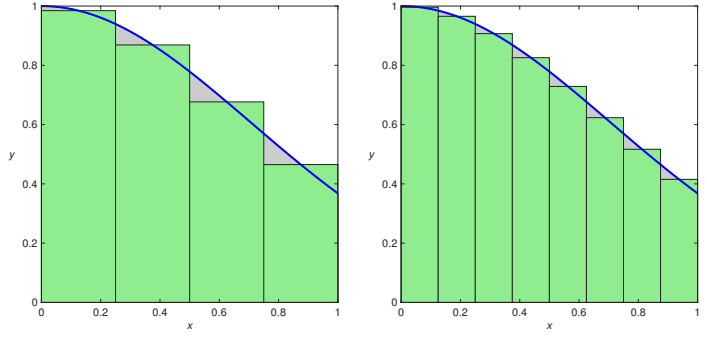
Opmerking: het resultaat voor $I - I_{\mathrm{tp}}$ volgt sneller op andere wijze dan met Taylor.

Numerieke integratie: uitgebreide methoden

We willen graag numerieke integratiemethoden die een integraal I met iedere (willekeurig hoge) nauwkeurigheid kunnen benaderen.

Zij $n \geqslant 1$ een willekeurig geheel getal en definieer $h = (b - a)/n$ en $x_k = a + kh$, $y_k = f(x_k)$ voor $k = 0, 1, \ldots, n$.

Pas een gegeven methode uit de voorgaande sectie dan toe op ieder *deelinterval* $[x_{k-1}, x_k]$ met $k = 1, 2, \ldots, n$ en tel vervolgens alle resultaten op. Bijvoorbeeld:



Dit geeft volgende vier uitgebreide methoden:

$$I_{\mathrm{vr}} = h \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\text{: de voorwaartse rechthoekregel}$$

$$I_{\mathrm{ar}} = h \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\text{: de achterwaartse rechthoekregel}$$

$$I_{\mathrm{mp}} = h \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\text{: de midpuntregel}$$

$$I_{\mathrm{tp}} = h\left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{1}{2}f(b)\right)\text{: de trapeziumregel}$$

Merk op dat de trapeziumregel slechts verschilt van de twee rechthoekregels via de gewichten voor de functiewaardes in de randpunten a en b.

Opgave 9 Pas de vier methoden toe in het voorbeeld als $n = 4$.

In het voorbeeld vinden we

n	I_{vr}	I_{ar}	I_{mp}	I_{tp}
1	1.00000000	0.36787944	0.77880078	0.68393972
2	0.88940039	0.57334011	0.75459794	0.73137025
4	0.82199917	0.66396903	0.74874713	0.74298410
8	0.78537315	0.70635808	0.74730358	0.74586561
16	0.76633836	0.72683083	0.74694391	0.74658460
32	0.75664114	0.73688737	0.74685407	0.74676425
64	0.75174761	0.74187072	0.74683162	0.74680916
128	0.74928961	0.74435117	0.74682600	0.74682039
256	0.74805781	0.74558859	0.74682460	0.74682320
512	0.74744120	0.74620659	0.74682425	0.74682390
1024	0.74713273	0.74651542	0.74682416	0.74682407

Dus vermoedelijk $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0.746824$. Rigoreus resultaat: opgave 10 (onder).

Voor de vier uitgebreide numerieke integratiemethoden volgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(b-a)m_1h \leqslant I - I_{\mathrm{vr}} &\leqslant \frac{1}{2}(b-a)M_1h,\\
-\frac{1}{2}(b-a)M_1h \leqslant I - I_{\mathrm{ar}} &\leqslant -\frac{1}{2}(b-a)m_1h,\\
\frac{1}{24}(b-a)m_2h^2 \leqslant I - I_{\mathrm{mp}} &\leqslant \frac{1}{24}(b-a)M_2h^2,\\
-\frac{1}{12}(b-a)M_2h^2 \leqslant I - I_{\mathrm{tp}} &\leqslant -\frac{1}{12}(b-a)m_2h^2,
\end{aligned}$$

waarbij $h = (b-a)/n$.

Alle vier methoden convergeren dus naar de exacte waarde I als $n \to \infty$.

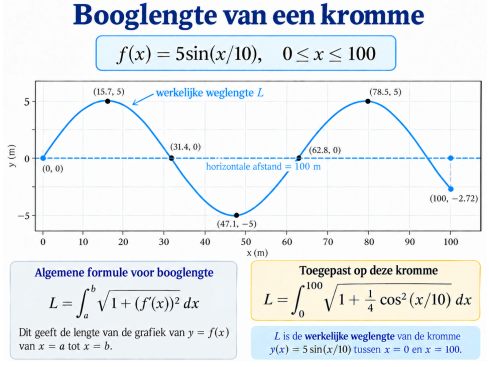
De midpuntregel en de trapeziumregel convergeren veel sneller naar I dan de twee rechthoekregels.

Opmerking: de doorwerking van foutjes (door afronding, metingen, etc) bij de vier numerieke integratiemethoden is altijd gunstig, ook als h klein is.

Opgave 10 Bewijs dat in het voorbeeld $|I - I_{\text{mp}}| < 8 \times 10^{-8}$ als $n = 1024$.

Opgave 11 Bepaal een zo klein mogelijke waarde n zodat in het voorbeeld gegarandeerd geldt dat $|I - I_{\text{mp}}| < 10^{-8}$.

Opgave 12 Benader de booglengte van de kromme in onderstaande figuur door toepassing van de trapeziumregel met $n = 1000$.



De numerieke integratiemethoden kunnen worden uitgebreid naar:

(a) methoden met hogere convergentiesnelheid (extrapolatie naar $h = 0$)
(b) methoden voor punten die niet op gelijke afstand van elkaar liggen
(c) methoden voor meerdimensionale integralen
(d) methoden voor gewone differentiaalvergelijkingen

Referenties

B. Koren, W.H.A. Schilders & C. Vuik, *Numeriek: Wiskunde die Werkt*. Syllabus Nazomercursus, Platform Wiskunde Nederland en Platform Wiskunde Vlaanderen, 2026.

R.L. Burden, D.J. Faires & A.M. Burden, *Numerical Analysis, 10th ed*. Cengage Learning, 2015.

T. Sauer, *Numerical Analysis, 3rd ed*. Pearson, 2017.

M.N. Spijker & K.J. in 't Hout, *Numerieke Analyse*. Cursusdictaat, Universiteit Antwerpen, 2022.